Вісник Астрономічної школи / Astronomical School's Report

Том 1 • № 1 • 2000 С. 51 – 58

УДК 520.12

Точные статические сферически симметричные решения, описывающие анизотропную жидкость

А.Н. Туринов

Днепропетровский госуниверситет, Украина

Предложен метод получения точных решений уравнений Эйнштейна для сферически симметричного распределения анизотропной материи. В сопутствующей системе координат радиальная и тангенциальная компоненты давления предполагаются пропорциональными друг другу. Для этого условия получено общее решения в квадратурах. Найдены некоторые точные аналитические решения. Исследованы возможности построения двухслойных статических сферических конфигураций, в которых ядро описывается изотропным решением, оболочка – анизотропным решением, внешнее пространство – решением Шварцшильда.

ТОЧНІ СТАТИЧНІ СФЕРИЧНО-СИМЕТРИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ, ЩО ОПИСУЮТЬ АНІЗОТРОПНУ РІДИНУ, Турінов А.Н. – Досліджується метод знаходження розв'язків рівнянь Ейнштейна для сферично симетричного розподілу анізотропної матерії. У супутній системі координат радіальна та тангенціальна компоненти тиску передбачаються пропорційними один одному. Для цієї умови отримано загальний розв'язок у квадратурах. Знайдені деякі точні аналітичні розв'язки. Досліджені можливості побудови двохшарових статичних сферичних конфігурацій, в яких ядро описується ізотропним розв'язком, оболонка – анізотропним розв'язком, зовнішній простір – розв'язком Шварцшильда.

THE EXACT SPHERICALLY SYMMETRIC STATIC SOLUTIONS THAT DESCRIBES ANISOTROPIC LIQUID, by Turinov A.N. – Method for constructing the solutions of the Einstein equations for spherically symmetric distribution of anisotropic matter is examined. In comoving frame radial and tangential components of the pressure that we have assumed proportional one to the other. Under this condition the common solution in quadratures is presented. Some exact analytical solutions are obtained. The possibilities of build-up of the two-layer static spherical configurations are researched. In this configurations the core is featured by isotropic solution, envelop – anisotropic solution, external space – Schwarzschild solution .

ВВЕДЕНИЕ.

Простейшей моделью нейтронных звезд, сферически симметричных звездных скоплений и других релятивистских объектов является однослойная статическая конфигурация с уравнением состояния жидкости. Такие модели строились и исследовались в ряде работ [1, 2, 3]. Рассмотрение статических решений показывает, что только небольшая их часть может быть использована для построения однослойных или ядра многослойных конфигураций. Детальное исследование однослойных конфигураций показало, что они не могут служить хорошими моделями реальных релятивистских объектов.

Наиболее приемлемыми моделями реальных космологических объектов в настоящее время являются многослойные конфигурации, построенные на основании точных решений ОТО. Но такие модели сейчас исследованы явно недостаточно. Построены двухслойные и трехслойные конфигурации, использующие различные комбинации решений Толмена, внутреннее решение Шварцшильда [4]. По сравнению с однослойными конфигурациями, двухслойные изучены существенно меньше, т.к. требуют достаточно сложных численных расчетов. Поэтому представляет интерес построение новых двухслойных конфигураций и анализ их свойств. Более того, современные теоретические исследования релятивистских звездных моделей указывают на то, что некоторые сверхмассивные космологические объекты могут быть локально анизотропными [5]. Поэтому представляет интерес исследование многослойных анизотропных конфигураций, построенных на основании решений уравнений Эйнштейна, которые допускают точное математическое описание.

В первой части работы предложен метод нахождения новых точных статических решений уравнений Эйнштейна при условии пропорциональности тангенциальной и радиальной компонент давления. Получено в квадратурах общее решение для рассматриваемого распределения материи. Во второй части предложены некоторые точные аналитические решения. В третьей части построены двухслойные конфигурации и исследованы некоторые их характеристики и возможности существования.

1. МЕТОД.

Выберем метрику для статического сферически симметричного распределения вещества в координатах кривизн

$$ds^2 = e^{\nu(r)}dt^2 - e^{\lambda(r)}dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right). \qquad (1)$$

В сопутствующей системе координат тензор энергии–импульса имеет следующие компоненты:

$$T_0^0 = \varepsilon(r), \quad T_1^1 = -p_r(r), \quad T_2^2 = T_3^3 = -p_\perp(r), \qquad (2)$$

где $\varepsilon(r)$ – плотность энергии, $p_r(r)$ и $p_\perp(r)$ радиальная и тангенциальная компоненты давления соответственно.

Анизотропия жидкости определяется следующим соотношением между компонентами давления:

$$p_\perp(r) = k\, p_r(r), \qquad (3)$$

где k – произвольная положительная постоянная.

Гравитационные уравнения Эйнштейна для метрики (1) имеют следующий вид:

$$p_r(r) = \left[e^{-\lambda}(\nu' r + 1) - 1\right]/r^2, \quad \varepsilon(r) = \left[1 - e^{-\lambda}(1 - \lambda' r)\right]/r^2,$$
$$\nu' = \left[4p_r(k-1) - 2p_r' r\right]/r\alpha, \tag{4}$$
где $\alpha = p_r(r) + \varepsilon(r)$, штрих означает дифференцирование по r. Величина $8\pi\gamma c^4$ включена в выражения для p_r и ε.

Система (4) представляет собой систему трех уравнений с четырьмя неизвестными. Четвертым уравнением должно быть уравнение состояния. Но тогда такая система может быть решена только приближенно. Поэтому в качестве четвертого условия выбирается некоторое дополнительное условие, которое дает возможность получить точное решение.

Из системы (4) можно исключить метрические коэффициенты и получит одно уравнение, которое представляет собой линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно p_r:
$$p_r'(V-1)(V-1/2) + p_r\left[V(V'r + 1 - V - 2V^2) - 4(k-1)(V-1/2)^2\right]/r^2 + \\ + V\left[V'r + V - 2V^2\right] = 0, \tag{5}$$
где
$$V(r) = \left[p_r' r - 2p_r(k-1)\right]/\alpha. \tag{6}$$
Таким образом, при любом выборе функции $V(r)$ давление, плотность энергии и метрические коэффициенты будут выражены в квадратурах.

Уравнение (5) может быть формально проинтегрировано
$$p_r(r) = \frac{1}{r^2}\left(-1 + W\left[C - 4k\int\frac{V-1/2}{W(V-1)}\frac{dr}{r}\right]\right), \tag{7}$$
где
$$W = \frac{r^6(V-1/2)}{(V-2)^2}\exp\left\{2\int\left(V + \frac{2}{V-1} + 2(k-1)\frac{V-1/2}{V-1}\right)\frac{dr}{r}\right\}, \tag{8}$$
C – произвольная постоянная.

Подставляя (7) в (4) получаем выражение для метрических функций и плотности энергии
$$\nu = -2\int V\frac{dr}{r}, \quad e^{\lambda} = \frac{1-2V}{p_r r^2 + 1}, \quad \varepsilon = \left[p_r' r - p_r(2(k-1) + V)\right]/V. \tag{9}$$
Одна из особенностей данного метода заключается в том, что он позволяет получать решения, как с физическими, так и с нефизическими уравнениями состояния. Поэтому необходимо задать такое дополнительное условие, которое бы приводило к уравнению состояния с заранее определенными свойствами.

2. НОВЫЕ ТОЧНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ.

Любая релятивистская конфигурация, претендующая на описание реальных объектов должна удовлетворять следующим условиям:
$$\varepsilon(r) > 0, \quad p_r(r) > 0, \quad \varepsilon'(r) < 0, \quad p_r'(r) < 0, \tag{10}$$
где штрих означает дифференцирование по r. Для нахождения решений нам необходимо задать явный вид функции $V(r)$. В [8] для изотропной жидкости $V(r)$ выбрана в следующем виде:
$$V(r) = -\frac{\mu y^2}{1+y^2}, \tag{11}$$

где μ – положительная безразмерная постоянная; $y = r/r_0$, r_0 – постоянная размерности длины. Тогда p_r и ε удовлетворяют требованиям (10). Для анизотропного случая $V(r)$ выберем в таком же виде. Подставляя (11) в (7) и (8) получаем выражение для $p_r(r)$:

$$p_r = \frac{1}{r^2}\left\{-1-\frac{1}{2}y^{2k}\left(1+[1+2\mu]y^2\right)\left(1+y^2\right)^{1-\mu}\left(1+[1+\mu]y^2\right)^{\frac{(k-1)\mu-2}{\mu+1}} \times \right.$$
$$\left. \times\left(C+4k\int\left(1+y^2\right)^{\mu-1}\left(1+[\mu+1]y^2\right)^{\frac{1-k\mu}{1+\mu}}y^{-2k-1}dy\right)\right. \quad (12)$$

Соответственно, метрические коэффициенты и плотность энергии:

$$e^{\nu} = B\left(1+y^2\right)^{\mu}, \quad e^{-\lambda} = \frac{\left(1+y^2\right)\left(p_r r^2+1\right)}{1+(2\mu+1)y^2},$$
$$\varepsilon = -\frac{1+y^2}{\mu y^2}\left\{p_r' r - p_r\left(2(k-1)-\frac{\mu y^2}{1+y^2}\right)\right\}, \quad (13)$$

где B – произвольная положительная постоянная.

Интеграл в (12) довольно громоздкий. Разрешить его в элементарных функциях возможно в случае, если μ – целое, а k – как целое, так и дробное число. Выбирая различные значения μ и k можно получить решения трех классов. Приведем здесь некоторые из них.

1. Прежде всего, решения для $k = 1$ – случай изотропной жидкости. Эти решения представляют ничто иное, как 4-е решение Толмена ($\mu = 1$) [6], решение Адлера ($\mu = 2$) [7], решение впервые полученное в работе [8] ($\mu = 3$):

$$e^{\nu} = H\left(1+y^2\right)^3, \quad e^{-\lambda} = 1-\frac{y^2}{2\left(1+y^2\right)}\left(3+\frac{C_0}{\sqrt{1+4y^2}}\right),$$
$$p_r r_0^2 = \frac{1}{2\left(1+y^2\right)}\left(9\left(1-y^2\right)-C_0\frac{\left(1+7y^2\right)}{\sqrt{1+4y^2}}\right), \varepsilon r_0^2 = \frac{3}{2\left(1+y^2\right)^2}\left(3+y^2+C_0\frac{\left(1+3y^2\right)}{\left(1+4y^2\right)^{3/2}}\right). \quad (14)$$

2. Для случая $k<1$ ($p_r > p_\perp$) получен ряд анизотропных решений, например для $\mu = 2$ и $k = 1/2$:

$$e^{\nu} = D\left(1+y^2\right)^2, \quad e^{-\lambda} = 1-\frac{y\left(8y-C_1\right)}{2\left(1+3y^2\right)},$$
$$p_r r_1^2 = \frac{C_1+5C_1y^2-16y^3}{2y\left(1+y^2\right)\left(1+3y^2\right)}, \quad \varepsilon r_1^2 = \frac{12y\left(1+y^2\right)-C_1}{y\left(1+3y^2\right)^2}. \quad (15)$$

Предельными решениями данного класса являются решения для $k = 0$ ($p_\perp = 0$), например $\mu = 3$:

$$e^{\nu} = B\left(1+y^2\right)^3, \; p_r r_2^2 = \frac{1}{y^2}\left[C_2\frac{\left(1+7y^2\right)}{\left(1+y^2\right)^2\left(1+4y^2\right)^{5/4}}-1\right],$$
$$e^{-\lambda} = \frac{C_2}{\left(1+y^2\right)\left(1+4y^2\right)^{5/4}}, \quad \varepsilon r_2^2 = \frac{\left(1+5y^2+4y^4\right)^2\left(1+4y^2\right)^{1/4}+C_2\left(14y^4+7y^2-1\right)}{\left(y+y^3\right)^2\left(1+4y^2\right)^{9/4}}. \quad (16)$$

где r_1 и r_2 – постоянные размерности длины, H, D, B, C_0, C_1, C_2 – существенно положительные постоянные.

Исследование решений данного класса показало, что при любом выборе произвольных постоянных решения удовлетворяют условию (10) только во внешнем слое $r_1 < r < R$, где R – граница конфигурации ($p(R) = 0$), при условии $r = r_1$ $p_r = \varepsilon$. Давление и плотность энергии в центре – бесконечные величины, вблизи же центра плотность энергии монотонно возрастает.

3. Для случая $k > 1$ ($p_\perp > p_r$) также получен ряд анизотропных решений, которые здесь не приводятся ввиду их громоздкости. Исследование этих решений показывает, что они удовлетворяют условиям (10) также во внешнем слое $r_2 < r < R$, где r_2 определяется из условия $p'_r(r_2) = 0$. Поведение вблизи центра существенно другое, чем у решений выше рассмотренного класса. В центре плотность энергии бесконечная и положительная величина, давление равно нулю. По мере удаления от центра давление растет до точки r_2, а затем монотонно убывает до нуля при $r = R$. Предельными решениями для данного класса являются решения с $k = \infty$ ($p_r = 0$). Чтобы получить точные решения, соответствующие этому условию, необходимо преобразовать уравнение (5) к виду

$$-4\frac{p_\perp}{r}(V - 1/2)^2 + \frac{V}{r^3}\left(V'r + V - 2V^2\right) = 0, \tag{17}$$

где

$$V(r) = -\frac{2p_\perp}{\varepsilon}. \tag{18}$$

Общее решение уравнений Эйнштейна для этого случая:

$$\begin{gathered} \nu = -2\int V\frac{dr}{r}, \qquad e^\lambda = 1 - 2V, \\ p_\perp = \frac{V\left(V'r + V - 2V^2\right)}{4r^2(V - 1/2)^2}, \qquad \varepsilon = -\frac{V'r + V - 2V^2}{2r^2(V - 1/2)^2}. \end{gathered} \tag{19}$$

Выберем функцию $V(r)$ вида (11). Решение для $\mu = 1$ имеет вид:

$$\begin{gathered} e^\nu = B\left(1 + y^2\right), \qquad e^\lambda = 1 + \frac{2y^2}{1 + y^2}, \\ p_\perp r_0^2 = \frac{3y^2}{\left(1 + 3y^2\right)^2}, \qquad \varepsilon r_0^2 = \frac{6\left(1 + y^2\right)}{\left(1 + 3y^2\right)^2}. \end{gathered} \tag{20}$$

Особенностью данных решений является то, что давление стремится к нулю по мере приближения к центру конфигурации и при $y \to \infty$, плотность энергии в центре конечная и положительная величина.

Таким образом, решения для случая $0 \le k < \infty$ могут использоваться для описания внешнего сферического слоя (оболочки) конфигурации, а решения для $k = \infty$ описывают внутренний сферический слой конфигурации.

3. ДВУХСЛОЙНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ.

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right). \tag{21}$$

Для сшивки решений будем использовать условия сшивки Лихнеровича–Дармуа. Во внутреннем решении имеем две произвольные постоянные H и r_0. Третья задана уравнением состояния в центре конфигурации. В оболочке три произвольные постоянные – B, C_2, r_2. В решении Шварцшильда одна – это r_g. Помимо этого необходимо определить радиус ядра $r_Я$ и радиус всей конфигурации R. Таким образом, имеем 8 величин, подлежащих определению условий сшивки – шесть.

Условия сшивки на границе "ядро–оболочка":

$e^{\nu}{}_Я\left(r_Я\right) = e^{\nu}{}_{ОБ}\left(r_Я\right)$ (22.1), $\quad e^{\lambda}{}_Я\left(r_Я\right) = e^{\lambda}{}_{ОБ}\left(r_Я\right)$ (22.2), $\quad p_{rЯ}\left(r_Я\right) = p_{rОБ}\left(r_Я\right)$ (22.3),

на границе конфигурации:

$e^{\nu}{}_{ОБ}(R) = e^{\nu}{}_Ш(R)$ (23.1), $\quad e^{\lambda}{}_{ОБ}(R) = e^{\lambda}{}_Ш(R)$ (23.2), $\quad p_{rОБ}(R) = 0$ (23.3).

Условиям (22.1), (22.2) и (22.3) соответствуют условия

$$H(1+z)^3 = B(1+x)^3; \tag{24.1}$$

$$1 - \frac{3z}{2(1+z)}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+4z}}\right) = \frac{C_2}{(1+x)(1+4x)^{5/4}}; \tag{24.2}$$

$$\frac{1}{r_0^2}\frac{3}{2(1+z)}\left(3(1-z) - \frac{(1+7z)}{(1+4z)^{1/2}}\right) = \frac{1}{r_2^2}\frac{1}{x}\left[-1 + C_2\frac{(1+7x)}{(1+x)^2(1+4x)^{5/4}}\right], \tag{24.3}$$

где $z = \left(r_Я / r_0\right)^2$, $x = \left(r_Я / r_2\right)^2$. Условиям (23.1), (23.2) и (23.3) соответствуют условия

$$B(1+y)^3 = 1 - \frac{r_g}{R}; \tag{25.1}$$

$$\frac{C_2}{(1+y)(1+4y)^{5/4}} = 1 - \frac{r_g}{R}; \tag{25.2}$$

$$\frac{1}{r_2^2}\frac{1}{y}\left[-1 + C_2\frac{(1+7y)}{(1+y)^2(1+4y)^{5/4}}\right] = 0. \tag{25.3}$$

где $y = \left(R / r_2\right)^2$. Введя обозначения

$$f_1(z) = \frac{3}{2(1+z)}\left(3(1-z) - \frac{(1+7z)}{(1+4z)^{1/2}}\right);\ f_1(x) = \left[\frac{(1+7x)}{(1+x)^2(1+4x)^{5/4}}\right];$$

$$f_2(z) = 1 - \frac{3z}{2(1+z)}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+4z}}\right);\ f_2(x) = \frac{C_2}{(1+x)(1+4x)^{5/4}}, \tag{26}$$

мы можем выразить величины x, C_2, r_0/r_2 через параметр z:

$$x = \frac{f_2(z) - \left[z\, f_1(z) + 1\right]}{z\, f_1(z) + 1 - 7\, f_2(z)}, \tag{27}$$

$$C_2 = \frac{f_2(z)}{f_2(x)}, \tag{28}$$

$$\frac{r_0}{r_2} = \left(\frac{x\, f_1(z)}{C_2\, f_1(x) - 1} \right)^{1/2}. \tag{29}$$

Величину R / r_2 определяем решением уравнения, полученного подстановкой (28) в (25.3):

$$\frac{1}{C_2} = \frac{(1 + 7y)}{(1 + y)^2 (1 + 4y)^{5/4}}. \tag{30}$$

С учетом решения (30) и (28) находим отношение r_g / R, а также безразмерные постоянные B и H:

$$\frac{r_g}{R} = \frac{6y}{1 + 7y}, \tag{31}$$

$$B = \frac{1}{(1 + 7y)(1 + y)^2}, \tag{32}$$

$$H = \frac{(1 + x)^3}{(1 + z)^3 (1 + 7y)(1 + y)^2}. \tag{33}$$

Из условий сшивки мы выразили через величину z постоянные B, H, и C, а также отношение R / r_0, R / r_2, $r_Я / R$, r_g / R, r_0 / r_2. Таким образом, все произвольные постоянные зависят только от двух величин z и r_0. r_0 –размерная постоянная, которая жестко связана с плотностью энергии в центре конфигурации:

$$r_0^2 = 9\, c^4 (8\, \pi\, \gamma\, \varepsilon_0)^{-1}, \tag{34}$$

где ε_0 – плотность энергии в центре конфигурации, γ – гравитационная постоянная, c – скорость света. В нашем случае z выступает в роли параметра. Но он не может быть произвольным. Максимальное значение $z = 0.3017$ определяется из условия $p_Я(z) = 0$.

Ограничения, накладываемые условиями сшивки на параметры нашей конфигурации приводят к следующему. Во-первых, сшивку можно произвести только в случае равенства размерных констант "ядра" и "оболочки" $r_0 = r_2$. Во-вторых, физически удовлетворительную конфигурацию можно построить только для единственного значения постоянной C, равной 1.465, которая соответствует отношению $r_Я / r_0 = 0.55$. Но эти значения определяют условие $r_Я / R = 1$, что соответствует полному отсутствию анизотропной оболочки у конфигурации. Свойства такой модели полностью описываются решением (14). Конфигурации, для которых значения $r_Я / r_0 < 0.55$, характеризуются наличием анизотропной оболочки, но плотность энергии на границе "ядро–оболочка" претерпевает скачок на увеличение своего значения, что не согласуется с современными физическими представлениями о строении релятивистских конфигураций.

Также были исследованы возможности сшивки полученных изотропных решений с анизотропными, которые характеризуются условиями $\mathrm{k} < 1$ по выше рассмотренной схеме. Результаты аналогичны результатам, полученным при сшивке изотропного ядра с решением для $k = 0$. Были исследованы сшивки изотропных решений с решениями, характеризующимися условием $k > 1$, в частности для $k = 2$ и $k = 13/7$. Полученные конфигурации вообще не могут быть использованы для описания релятивистских источников, так как на всем интервале изменения параметра z отношение r_g / R всегда отрицательно.

4. ВЫВОДЫ.

В данной работе предложен метод нахождения точных решений уравнений Эйнштейна для сферически симметричного распределения анизотропной жидкости, характеризующейся условием $p_{\perp}(r) = k\, p_r(r)$. Для данного распределения получено общее решение в квадратурах.

Получены новые точные аналитические решения для статических сфер. Все решения, характеризующиеся условием $0 \le k < \infty$, могут использоваться для описания оболочки релятивистских сферически симметричных конфигураций. Решения для $k = \infty$ описывают лишь внутренний сферический слой.

Построенные двухслойные статические конфигурации, в которых ядро описывается изотропным решением, а оболочка – решением с $k < 1$, описывают конфигурации с предельно возможными параметрами сшивок – конфигурации с отсутствующей анизотропной оболочкой.

Двухслойные статические конфигурации, в которых оболочка описывается решением с $k > 1$, вообще не могут быть построены.

Для окончательного утверждения о возможности построения двухслойных конфигураций, в которых оболочки описываются предложенными точными анизотропными решениями, необходимо исследовать возможности сшивок этих решений с другими изотропными решениями, к примеру, с внутренним решением Шварцшильда или с решениями Толмена.

Выражаю благодарность моему научному руководителю, профессору кафедры теоретической физики Днепропетровского университета Коркиной Марине Петровне за постановку задачи и обсуждение полученных результатов.

1. *Опенгеймер Ю., Волков Г.* О массивных нейтронных сердцевинах. – В кн.: Альберт Эйнштейн и теория гравитации. – М.: Мир, 1979. – с. 337–352
2. *Durgapal M.C., Pande A.K.*, Ind. J. Pure and Appl. Phys.,1980 v. 18, n.3, p.171–175
3. *Lindbom L.*, J. Math. Phys., 1980, v.21, n.6, p.1455–1459
4. *Krori K.D., Borgohain P.*, Ind. J. Pure and Appl. Phys.,1974 v.12, n.6, p.423–429
5. *Ruderman M.*, Ann. Rev. Astron. Astrophys. 10, 427 (1972)
6. *Tolman R.C.*, Phys. Rev. 55, 364 (1939)
7. *Adler R.J.*, J. Math. Phys. 15, 727 (1974)
8. *Коркина М.П.*, Известия Вузов. Физика. 5, 87 (1981)

Поступила в редакцию 05.05.99