

УДК 521; 528

Описание гравитационного потенциала тел вращения**В.А. Антонов¹, О.А. Железняк², О.В. Завизион²**¹ Главная астрономическая обсерватория Российской АН, Россия² Уманский педагогический университет, Украина

Анализується можливість представлення зовнішнього гравітаційного потенціалу осесиметричного тіла потенціалом неоднорідного стержня. В залежності від форми тіла, такі стержні можуть бути як дійсними, так і комплексними. Дані приклади вичислення розподілу густини в таких стержнях.

ОПИСАННЯ ГРАВИТАЦІЙНОГО ПОТЕНЦІАЛУ ТІЛ ОБЕРТАННЯ. Антонов В.А., Железняк О.О., Завізіон О.В. – Аналізується можливість задання зовнішнього гравітаційного потенціалу вісесиметричного тіла потенціалом неоднорідного стержня. В залежності від форми тіла, такі стержні можуть бути як дійсними, так і комплексними. Наведено приклади обчислення розподілу густини в таких стержнях.

DESCRIPTION OF THE GRAVITATIONAL POTENTIAL OF BODIES OF REVOLUTION, by Antonov V.A., Zheleznyak O.A., Zavizion O.V. – Possibility of description of external gravitational potential of axially symmetric body with the potential of inhomogeneous pivot is analyzed. Depending on the body's shape such pivots can be both real and complex. Examples of calculation of the density distribution in such pivots are given.

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно [1, 3, 5], что ньютоновский потенциал тела, симметричного относительно оси вращения имеет вид:

$$\Phi(R, z) = G \iiint_V \frac{\rho(R', z') R' dR' dz' d\varphi'}{\sqrt{R'^2 + R^2 - 2RR' \cos \varphi' + (z - z')^2}} \quad (1)$$

и может быть представлен на больших расстояния рядом

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n r^{-n-1} P_n(\cos \theta) \quad (2)$$

где r, θ – полярные координаты; R, z – цилиндрические координаты; ρ – плотность, G – гравитационная постоянная, P_n – полиномы Лежандра. Система коэффициентов $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ зависит от формы фигуры и распределения плотности в ней. В частности, на полярной оси $\theta = 0$ интеграл (1) превращается в

$$\Phi(0, z) = 2\pi G \iiint_V \frac{\rho(R', z') R' dR' dz'}{\sqrt{R'^2 + (z - z')^2}} \quad (3)$$

а в разложении (2), используя $P_n(1) = 1$, получим:

$$\Phi(0, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n z^{-(n+1)}$$

Поскольку разложение функции $\Phi(0, z)$ в ряд по степеням z^{-1} однозначно, то задания $\Phi(0, z)$ достаточно для определения всех коэффициентов γ_n и, следовательно, нахождения потенциала (2) во всем внешнем пространстве. Таким образом, гравитационный потенциал тел вращения обладает тем специальным свойством, что он однозначно определяется повсюду по значениям только на оси вращения. Задачи, связанные с определением гравитационного потенциала тел, симметричных относительно оси, часто встречаются в астрономии, геодезии и геофизике. Представление потенциала в форме (1) и (2) не всегда является наиболее удобным. Иногда более наглядным представлением является задание замещающего неоднородного стержня на оси вращения, имеющего определенную длину, который порождает бы тот же самый внешний потенциал. Точнее, под совпадением потенциалов двух тел подразумевается их тождество вне какой-то сферы, охватывающей оба тела. Если проникать внутрь этой поверхности, то внешний потенциал тела может смениться внутренним, т.е. другой функцией, отличной от аналитического продолжения внешнего потенциала.

Замещающие эквивалентные неоднородные стержни могут служить удобным средством, в частности, для классификации возможных потенциалов, определения энергии других различных тел в поле тяготения, оценки радиуса сходимости ряда (2), анализа устойчивости внешних орбит частиц.

2. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ЗАМЕЩАЮЩИХ СТЕРЖНЕЙ.

Определение аналитическими методами распределения плотности замещающих стержней сталкивается с математическими трудностями, поскольку существенно зависит от формы тела вращения. В ряде случаев с помощью метода моментов можно легко найти плотность $\mu(z)$ замещающего стержня. Принцип таких расчетов указан в [1]: функция $\mu(z)$ должна удовлетворять системе интегральных условий

$$G \int z^n \mu(z) dz = \gamma_n \quad (5)$$

Первый пример дает однородный вытянутый сфероид с полуосями a , a , c . Для него известно [3]

$$\gamma_n = \begin{cases} \frac{4\pi G \rho a^2 c (c^2 - a^2)^n}{(n+1)(n+3)}, & n - \text{четное} \\ 0, & n - \text{нечетное} \end{cases} \quad (6)$$

Набору моментов (6) соответствует параболический закон распределения плотности замещающего стержня $[-\sqrt{c^2 - a^2}, \sqrt{c^2 - a^2}]$

$$\mu(z) = \frac{\pi \rho a^2 c}{(c^2 - a^2)^{3/2}} (c^2 - a^2 - z^2) \quad (7)$$

Этот ответ однозначен, как и во всех других случаях существования вещественного стержня. Действительно, коэффициенты γ_n ряда (2) для любого конечного тела при $n \rightarrow \infty$

остаются по модулю меньше некоторой убывающей геометрической прогрессии, а это, как известно [2], достаточно для однозначного решения проблемы моментов.

Аналогичное доказательство можно получить и другим методом. По определению, функция $\mu(z)$, заданная на отрезке $[\alpha, \beta]$, должна удовлетворять интегральному уравнению в цилиндрических координатах (R, z)

$$G \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\mu(\xi) d\xi}{\sqrt{(z - \xi)^2 + R^2}} = \Phi(R, z) \quad (8)$$

во всей области притягивающего тела. Структура интеграла (8) показывает, что $\Phi(R, z)$ как гармоническая функция допускает аналитическое продолжение на все пространство за вычетом самого стержня ($x = y = 0, \alpha \leq z \leq \beta$). При приближении к самому стержню, согласно общим свойствам интегралов типа стоящих в левой части (8), функция $\Phi(R, z)$ становится логарифмически сингулярной [1, 3, 5] с асимптотическим условием:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \frac{\partial \Phi}{\partial R} = -2G\mu(z) \quad (9)$$

По смыслу (9), стержень $[\alpha, \beta]$ и функция $\mu(z)$ на нем определяется однозначно.

Однозначность нельзя, конечно, путать с существованием решения задачи. Критерий существования решения проблемы моментов известен [2], но довольно громоздко для практической проверки. Во всяком случае, для последовательностей γ_n , связанных с потенциалами, проблема не всегда разрешима. Более того, неразрешимость может оставаться и тогда, когда допускаются значения $\mu(z)$ любого знака, а не только положительного, как в классической небесно-механической постановке. Достаточно опять сослаться на возможность аналитического продолжения $\Phi(R, z)$ вплоть до оси при любой вещественной функции $\mu(z)$. Если, следовательно, у заданного потенциала $\Phi(R, z)$ такого аналитического продолжения нет, то нет и замещающего стержня. Элементарным примером здесь может служить бесконечно тонкое кольцо радиуса a и массы M , расположенное в плоскости $z = 0$. Его потенциал [3]:

$$\Phi = \frac{2GM}{\pi \sqrt{z^2 + (R + a)^2}} K(\chi) \quad (10)$$

выражается через полный эллиптический интеграл $K(\chi)$ с модулем

$$\chi = \left[\frac{4aR}{z^2 + (R + a)^2} \right]^{1/2}$$

и имеет логарифмическую сингулярность вне оси при $R = a, z = 0, \chi = 1$. В данном простейшем примере потенциал всюду «настоящий», но в более сложных случаях приходится следить за аналитическим продолжением Φ внутри тела.

Идею изучаемого представления гравитационного потенциала можно во многих случаях сохранить, если пойти на дальнейшее обобщение и формально перенести построение замещающего стержня в комплексную плоскость z , с соответствующей плотностью $\mu(z)$, также, вообще говоря, комплексной. (Во избежание недоразумений, далее предпочитаем выписывать сразу произведение $\mu(z) dz$). Опять-таки здесь возможен подбор $\mu(z)$ по последо-

вательности моментов. В частности, для только что упомянутого кругового кольца направляем замещающий стержень вдоль мнимой оси: $z = it$, где t вещественно, $-a < t < a$. Задаем

$$\mu(z)dz = \frac{Mdt}{\pi\sqrt{a-t^2}} \quad (11)$$

и легко убеждаемся, что значения моментов при этом соответствует разложению потенциала на оси (частный случай (10)):

$$\Phi(0, z) = \frac{GM}{\sqrt{a^2 + z^2}} = GM \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(2m-1)!!}{2m!!} \frac{a^{2m}}{z^{2m+1}} \quad (z > a)$$

В отличие от вещественного случая, определение комплексного замещающего стержня не является в строгом смысле слова однозначным: этот стержень можно как угодно искривлять, сохраняя положение отдельных точек, лишь бы этот искривленный путь интегрирования в (8) не задевал особых точек $\mu(z)$ [4].

В качестве более сложного примера рассмотрим однородное тороидальное тело (см. рис. 1), получающееся вращением лемнискаты вокруг вертикальной оси:

$$r^2 = -a^2 \cos 2\theta \quad \left(\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}\right) \quad (12)$$

Воспользуемся другим методом. Рассмотрим внешний потенциал согласно формулы (4) только на оси симметрии Oz . Формально будем придавать z какие-то комплексные значения, т.е. берем аналитическое продолжение $\Phi(0, z) = f(z)$, отправляясь от достаточно больших положительных значений z . Такое аналитическое продолжение существует $\mu(z)$ и однозначно по крайней мере при $|z| > r_0$, где r_0 – радиус сферы с центром в начале координат, охватывающей все тороидальное тело ($r_0 = a$). Кстати, этот иной вид аналитического продолжения функций, чем встретившийся в предыдущем методе. Там рассматривалось продолжение внешнего потенциала с координатами R, z , а здесь – аналитическое продолжение значений $f(z)$ вещественные отрицательные значения z получаются заменой z на $-z$ в (4), т.е.

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \gamma_n |z|^{-(n+1)} \quad (z < 0) \quad (13)$$

Фактически же из (2) следует при $\theta = \pi$

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \gamma_n r^{-n-1} \quad (14)$$

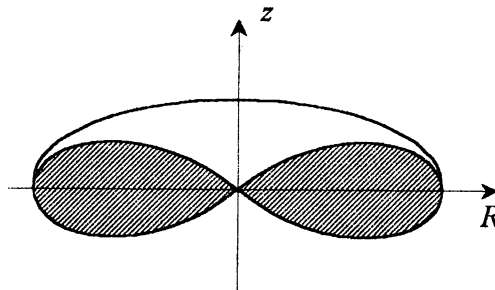


Рис. 1. Лемнискатический однородный тор

Сравнение (13) и (14) показывает, что оба вида аналитического продолжения дают на нижней части оси z значения, отличающиеся знаком. Противоречия здесь не возникает, поскольку невозможен полный синтез обоих видов аналитического продолжения: при одновременном придании R и z комплексных значений возникли бы сингулярности из-за обращения иногда функционального «расстояния» между притягивающей и пробной точкой в нуль даже для сколь угодно больших значений модулей координат.

Вернемся конкретно к тороидальной фигуре с меридиональным сечением (12). Расчет потенциала на оси симметрии

$$f(z) = 2\pi G\rho \iint \frac{R dR dz'}{\sqrt{(z-z')^2 + R^2}}$$

с интегрированием по всему лепестку лемнискаты приводит после некоторых выкладок (интегрирование удобнее начинать с R) к виду:

$$f(z) = \pi G\rho a^2 \int_0^\pi \left[1 + \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{a^2 + 2z^2}} \right]^{\frac{1}{2}} \cos \varphi d\varphi \quad (15)$$

Как для всякой функции комплексной переменной, значение $f(z)$ в произвольной точке можно представить [4] контурным интегралом:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}$$

где Γ – произвольный контур, охватывающий точку z комплексной плоскости. В частности, область, ограниченная Γ , может быть и кольцеобразной. Тогда, согласно общему правилу, из двух контуров, составляющих границу области, внешний берется в положительном направлении, а внутренний – в отрицательном. Расширяем теперь внешний контур до бесконечности. Ввиду того, что функция $f(\xi)$ ведет себя при $\xi \rightarrow \infty$ как ξ^{-1} , вклад от внешнего контура асимптотически исчезает. Остается

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} \quad (16)$$

По смыслу вывода (15), эта формула при заданном контуре C верна для всех точек z вне его. Контур C можно до известных пределов стянуть внутрь, и справедливость формулы (16) будет сохраняться для аналитического продолжения $f(z)$. Предельным случаем является натягивание C на особые точки $f(z)$. В данном конкретном примере правая часть (15) утрачивает регулярность при $a^2 + 2z^2 = 0$, либо при $a(a^2 + 2z^2)^{-\frac{1}{2}} = \pm 1$. Эти условия соответственно дают особые точки $z = \pm \frac{ia}{\sqrt{2}}$ и $z = 0$, расположенные вдоль отрезка мнимой

оси между $z_1 = -\frac{ia}{\sqrt{2}}$ и $z_2 = \frac{ia}{\sqrt{2}}$ (см. рис.2). Контурный же интеграл в предельном случае сводится к разности интегралов от z_1 до z_2 соответственно при бесконечно малой положительной добавке и при такой же отрицательной добавке к чисто мнимому ξ . В формуле (16) в пределе появляется обычный прямолинейный интеграл:

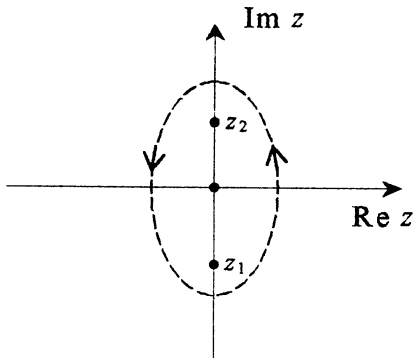


Рис.2 Предельный контур интегрирования

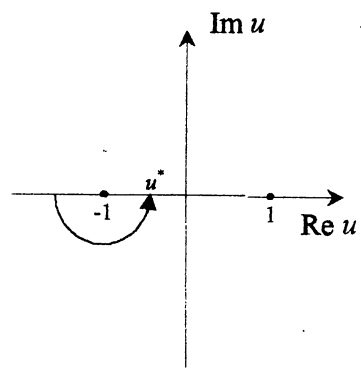


Рис.3. Обход особой точки в (20)

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{z_1}^{z_2} \frac{[f(\xi)]_+^+}{\xi - z} d\xi \quad (17)$$

где символ $[...]_+^+$ означает разность значений функции при переходе со стороны $\text{Re } \xi > 0$ к $\text{Re } \xi < 0$. С другой стороны, частным случаем (8) для потенциала на оси является

$$G \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\mu(\xi)}{z - \xi} d\xi = f(z) \quad (z > 0) \quad (18)$$

Сравнение (17) и (18) дает искомую плотность мнимого стержня:

$$\mu(\xi) = \frac{1}{2\pi i G} [f(\xi)]_+^+ \quad (19)$$

Конкретно, при изменении z в (15) от $+\infty$ до малого $\varepsilon > 0$ и даже при обходе четверти окружности радиуса ε с выходом на мнимую ось z находим с подстановкой $\cos \varphi = u$

$$f(it) = \pi G \rho a^2 \int_0^{\pi} (1 + q \cos \varphi)^{1/2} \cos \varphi d\varphi = \pi G \rho a^2 \int_{-1}^1 u \left(\frac{1 + qu}{1 - u^2} \right)^{1/2} du \quad (20)$$

где $q = a(a^2 - 2t^2)^{1/2}$, $t > 0$.

Однако, при взятии интеграла в правой части (20) необходимо следить за правильным обходом особой точки $u^* = -\frac{1}{q}$. При вещественном z она располагается левее точки $u^* < -1$, а когда z меняется от ε до $i\varepsilon$, u^* приобретает отрицательную мнимую часть. На рис.3 стрелкой показано движение особой точки $u = u^*$. Множитель $(1 + qu)^{1/2}$ в (20) на интервале $(-1, u^*)$ при этом получает коэффициент $+i$, а на интервале $(u^*, 1)$ остается положительным. Учитывая это, имеем:

$$f(it) = i\Psi_1(t) + \Psi_2(t), \quad (t > 0) \quad (21)$$

где

$$\Psi_1(t) = \pi G \rho a^2 \int_{-1}^{u^*} u \left(\frac{-1 - qu}{1 - u^2} \right)^{1/2} du \quad \Psi_2(t) = \pi G \rho a^2 \int_{u^*}^1 u \left(\frac{1 + qu}{1 - u^2} \right)^{1/2} du$$

при $t < 0$ имеем просто комплексно сопряженное значение

$$f(it) = i\Psi_1(t) + \Psi_2(t) \quad (21a)$$

До сих пор рассматривались значения $f(z)$ с малой положительной добавкой к z . При такой же отрицательной добавке значения $f(z)$ можно найти, сославшись на уже упомянутый факт, что $f(z)$ ведет себя при замене z на $-z$ противоположно истинному потенциалу, т.е. является в данном конкретном примере нечетной функцией. Из (21) и (21a) тогда сразу следуют формулы:

$$f(it) = i\Psi_1(t) - \Psi_2(t), \quad (t > 0), \quad f(-it) = -i\Psi_1(t) - \Psi_2(t) \quad (22)$$

Согласно (19) получаем

$$\mu(it) = \frac{\Psi_2(t)}{\pi i G}$$

или

$$\mu = -i\rho a^2 \int_{-\frac{1}{q}}^1 u \left(\frac{1+qu}{1-u^2} \right)^{1/2} du \quad (23)$$

где $q = a(a^2 - 2t^2)^{-1/2}$, $-\frac{a}{\sqrt{2}} < t < \frac{a}{\sqrt{2}}$

Формулой (23) выражается искомое распределение плотности замещающего мнимого стержня лемнискатического однородного тора. Представление (23) через стандартные формы эллиптических интегралов несколько громоздко:

$$\mu = -\frac{2i\rho a^2}{3\sqrt{2q}} [2E(\chi) + (q-1)K(\chi)] \quad (24)$$

где введен модуль полных эллиптических интегралов

$$\chi = \left(\frac{1+q}{2r} \right)^{1/2} = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{t\sqrt{2}}{a} \right)^{1/2} + \left(1 + \frac{t\sqrt{2}}{a} \right)^{1/2} \right]$$

Используя изложенные методы, можно определить распределение плотности замещающих стержней для других самогравитирующих фигур, имеющих осевую симметрию. Отметим, что при наличии нескольких особых точек, не лежащих на одной прямой, вместо замещающего мнимого стержня, вообще говоря, получаются более сложные разветвленные образования.

Авторы выражают благодарность профессору Марченко А. и профессору Кондратьеву Б. за обсуждение некоторых вопросов, затронутых в нашей работе.

1. Антонов В.А., Тимашкова Е.И., Холшевников К.В. Введение в теорию ньютоновского потенциала. – М.: Наука, 1988. – 269 с.
2. Ахиезер Н.И. Классическая проблема моментов. – М.: Физматгиз, 1961. – 312 с.
3. Дубошин Г.Н. Теория притяжения. – М.: Физматгиз, 1961. – 288 с.
4. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Гостехтеориздат, 1954. – 444 с.
5. Субботин М.Ф. Курс небесной механики. Т.3. – М.-Л.: Гостехтеориздат, 1949. – 280 с.

Поступила в редакцию 21.06.99